# 01 Proportion – Verhältnis – Maßstab

**A1**

Lies die folgende Information sorgfältig. Markiere wichtige Begriffe und Formeln.

**a) Proportionale Zuordnung**
Bei einer proportionalen Zuordnung ist der Quotient aus einander zugeordneten Größen immer gleich.

*Beispiel:* 10 Liter Benzin kosten 15,50 €, 20 Liter Benzin kosten 31 €.

$\frac{15{,}50\ €}{10\ l} = \frac{31{,}00\ €}{20\ l} = 1{,}55\ €/l$

Den Quotienten (1,55 €/Liter) nennt man **Proportionalitätsfaktor.**

Die Gleichung $\frac{15{,}50\ €}{10\ l} = \frac{31{,}00\ €}{20\ l}$ nennt man **Proportion** oder Verhältnisgleichung.

Beachte: $\frac{3}{4}$ kann man auffassen als
- rationale Zahl („drei Viertel“)
- als Quotienten aus den Zahlen 3 und 4 („drei dividiert durch vier“)
- als Verhältnis 3 : 4 („drei zu vier“)

**b) Verhältnis**
Unter dem **Verhältnis a : b** versteht man den Quotienten aus a und b (a, b ≠ 0).
Man sagt: „a verhält sich zu b“ oder kurz „a zu b“.
Der **Wert eines Verhältnisses** bleibt gleich, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

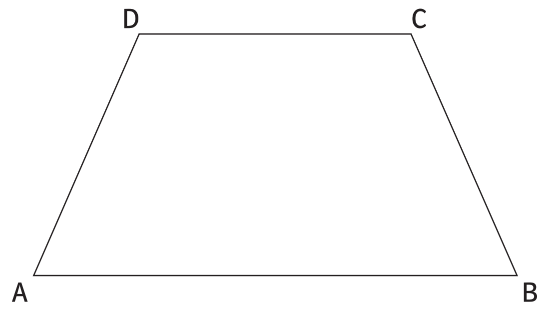
$a : b = (a \cdot x) : (b \cdot x)$ oder auch $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$

Sind zwei Verhältnisse a : b und c : d (a, b, c, d ≠ 0) gleich, so darf man sie mit dem Gleichheitszeichen verbinden.
Es entsteht eine **Verhältnisgleichung** oder Proportion: a : b = c : d. Man liest: „a verhält sich zu b wie c zu d“.

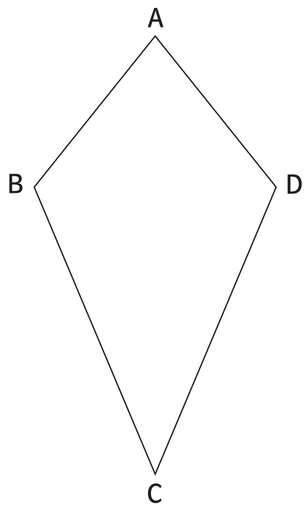
*Beispiel:* Hält man zwei Stäbe in die Sonne, von denen der zweite doppelt so lang ist wie der erste, so verhalten sich ihre Schattenlängen wie 1 : 2. Ist der erste Stab 50 cm lang und der zweite 1 m lang, so lautet die entsprechende Verhältnisgleichung 50 : 100 = 1 : 2.

a) Zeichne die Figur im Maßstab 2 : 1 auf ein Blatt.
Beschrifte die Eckpunkte mit A′, B′, C′ und D′.
Schneide beide Figuren aus und lege sie übereinander.

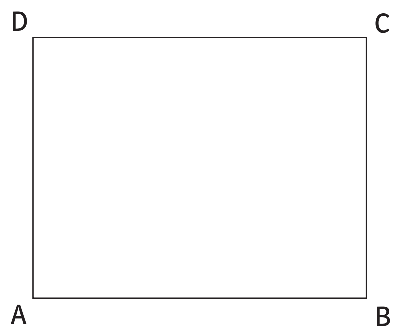

b) Zeichne die Figur im Maßstab 3 : 1 auf ein Blatt.
Beschrifte die Eckpunkte mit A′, B′, C′ und D′.
Schneide beide Figuren aus und lege sie übereinander.



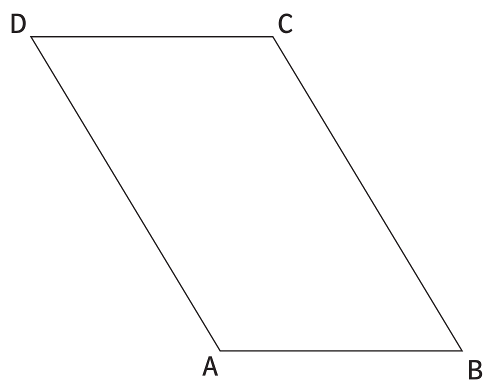

c) Zeichne die Figur im Maßstab 1 : 2 auf ein Blatt.
Beschrifte die Eckpunkte mit A′, B′, C′ und D′.
Schneide beide Figuren aus und lege sie übereinander.



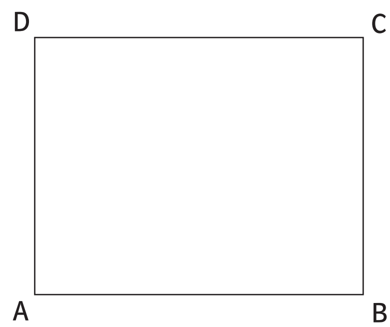

d) Zeichne die Figur im Maßstab 1 : 3 auf ein Blatt.
Beschrifte die Eckpunkte mit A′, B′, C′ und D′.
Schneide beide Figuren aus und lege sie übereinander.



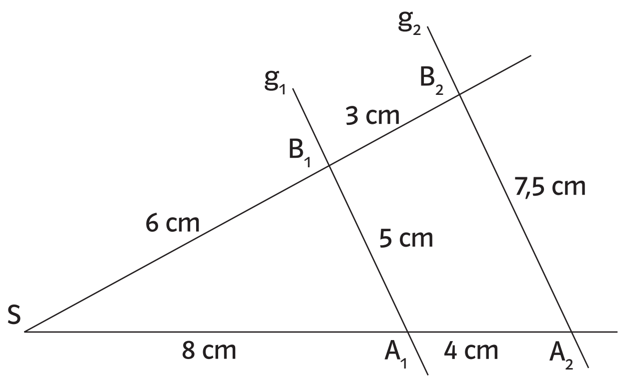

e) Zeichne die Figur im Maßstab 2 : 1 auf ein Blatt.
Beschrifte die Eckpunkte mit A′, B′, C′ und D′.
Schneide beide Figuren aus und lege sie übereinander.




f) Zeichne die Figur im Maßstab 2 : 1 auf ein Blatt.
Beschrifte die Eckpunkte mit A′, B′, C′ und D′.
Schneide beide Figuren aus und lege sie übereinander.



## a) Arbeitsblatt zum 1. Strahlensatz




Diese Figur heißt **Strahlensatzfigur**:
Zwei Strahlen, die von einem Scheitel S ausgehen werden, von zwei **parallelen** Geraden $g_1$ und $g_2$ geschnitten.

(I) Kannst du ähnliche Dreiecke erkennen? Male die Seiten des einen Dreiecks rot und die des anderen blau.

(II) Fülle die Tabelle aus. Achte dabei darauf, welche Seitenverhältnisse betrachtet werden!

| $\frac{\text{Streckenlänge 1}}{\text{Streckenlänge 2}}$ | in cm | Verhältnis |
|---|---|---|
| $\frac{\lvert\overline{SA_1}\rvert}{\lvert\overline{SA_2}\rvert}$ | $\frac{8\text{ cm}}{12\text{ cm}}$ | 2 : 3 |
| $\frac{\lvert\overline{SB_1}\rvert}{\lvert\overline{SB_2}\rvert}$ | | |
| $\frac{\lvert\overline{A_1A_2}\rvert}{\phantom{x}}$ | $\frac{4\text{ cm}}{8\text{ cm}}$ | |
| | $\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}}$ | |

Du weißt: Die Strecke vom Punkt A zum Punkt B bezeichnet man mit $\overline{AB}$, die Länge dieser Strecke mit $|\overline{AB}|$.

**1. Strahlensatz:**
Werden zwei Strahlen, die von einem gemeinsamen Scheitel S ausgehen von zwei **parallelen** Geraden geschnitten, so ist das Verhältnis zweier Strahlenabschnitte auf dem einen Strahl genauso groß wie das Verhältnis der entsprechenden Strahlenabschnitte auf dem anderen Strahl.

$$\frac{|\overline{SA_1}|}{|\overline{SA_2}|} = \frac{|\overline{SB_1}|}{\phantom{xx}} \quad \text{und} \quad \frac{|\overline{A_1A_2}|}{|\overline{SA_1}|} = \frac{|\overline{B_1B_2}|}{\phantom{xx}}$$

**Lösungen (unsortiert)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 : 3 | 1 : 2 | $\lvert\overline{SA_1}\rvert$ | $\lvert\overline{SB_2}\rvert$ |
| 1 : 2 | $\frac{6\text{ cm}}{9\text{ cm}}$ | $\frac{\lvert\overline{B_1B_2}\rvert}{\lvert\overline{SB_1}\rvert}$ | $\lvert\overline{SB_1}\rvert$ |

# Test

**1.** Auf einer Landkarte mit dem Maßstab 1 : 1 000 000 ist der Weg von A-Stadt nach B-Stadt 4 cm lang. Ist die Entfernung in Wirklichkeit 4 km, 40 km oder 400 km? Streiche die falschen Größen durch.

**2.** „Eigentlich ist der Maßstab nichts anderes als ein Proportionalitätsfaktor", behauptet Max. Hat er Recht? Begründe deine Meinung.

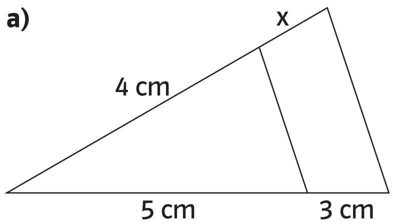
**3.** Ein Rechteck ist 90 m lang und 30 m breit.
**a)** Wie breit muss ein dazu ähnliches Rechteck sein, das 60 m lang ist?
**b)** Berechne den Umfang beider Rechtecke.
**c)** Berechne den Flächeninhalt beider Rechtecke.
**d)** Gib den Maßstab an, mit dem das Rechteck verkleinert wurde. Haben sich Umfang und Flächeninhalt um denselben Faktor verändert? Begründe deine Meinung.

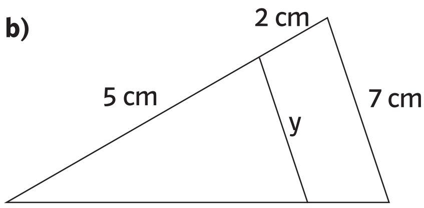
**4.** Zeichne ein beliebiges Viereck ABCD. Markiere die Mittelpunkte $M_1$ und $M_2$ zweier benachbarter Seiten und verbinde sie.
Begründe, dass die Strecke $\overline{M_1M_2}$ parallel zu einer Diagonalen des Vierecks verläuft und halb so lang wie diese ist.

**5.** Zeichne ein Dreieck ABC mit c = 7 cm, $\alpha$ = 90° und $\beta$ = 40°. Zeichne ein dazu ähnliches Dreieck A'B'C' (A = A') mit c' = 4 cm.

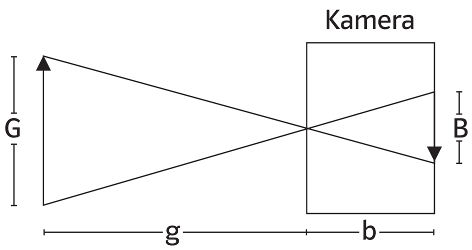
**6.** Welche der folgenden Figuren sind immer ähnlich zueinander? Begründe jeweils deine Meinung:
**a)** gleichseitige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke, kongruente Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke, spitzwinklige Dreiecke.
**b)** Kreise, Rechtecke, Quadrate, Drachen, Rauten.

**7.** Berechne x und y.

**a)**



**b)**



**8.** Die Lochkamera kennst du vermutlich aus dem Physikunterricht. Diese „Camera obscura" bildet Gegenstände auf dem Kopf stehend und verkleinert ab.




Stelle eine Formel auf, die die Gegenstandsgröße G, die Bildgröße B, die Gegenstandsweite g und die Bildweite b in Beziehung setzt.

# Folienvorschlag: Sinus, Kosinus und Tangens

**Ihr wisst bereits:** Rechtwinklige Dreiecke, die in einem weiteren außer dem rechten Winkel übereinstimmen, stimmen in allen drei Winkeln überein. Solche Dreiecke sind **ähnlich** zueinander.

**Sinus:**

In **ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ABC** ($\gamma = 90°$) hat der Quotient

$\frac{a}{c} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$ ($\boldsymbol{\alpha} \neq 90°$) denselben Wert.

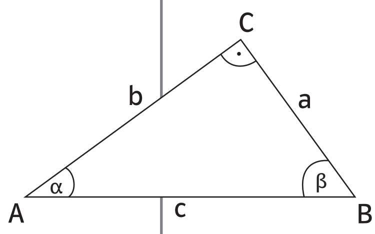
Egal, wie groß das Dreieck ist!

Diesen Wert nennt man **Sinus von α**. Man schreibt $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\frac{a}{c}}$.

Dieser Wert hängt nur von der Größe des Winkels α ab.

Entsprechendes gilt auch für den zweiten spitzen Winkel β:

$\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\beta} = \frac{b}{c} = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \beta}{\text{Länge der Hypotenuse}}$ ($\beta \neq 90°$)




**Kosinus:**

In **ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ABC** ($\gamma = 90°$) hat der Quotient

$\frac{b}{c} = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$ ($\alpha \neq 90°$) denselben Wert.

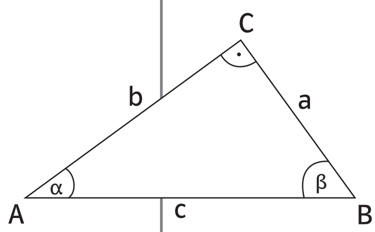
Egal, wie groß das Dreieck ist!

Diesen Wert nennt man **Kosinus von α**. Man schreibt $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\frac{b}{c}}$.

Dieser Wert hängt nur von der Größe des Winkels α ab.

Entsprechendes gilt auch für den zweiten spitzen Winkel β:

$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{\frac{a}{c}} = \frac{\text{Länge der Ankathete von } \beta}{\text{Länge der Hypotenuse}}$ ($\beta \neq 90°$)




**Tangens:**

In **ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ABC** ($\gamma = 90°$) hat der Quotient

$\frac{a}{b} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete von } \alpha}{\text{Länge der Ankathete von } \alpha}$ ($\alpha \neq 90°$) denselben Wert.

Egal, wie groß das Dreieck ist!

Diesen Wert nennt man **Tangens von α**. Man schreibt $\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\frac{a}{b}}$.

Dieser Wert hängt nur von der Größe des Winkels α ab.

Entsprechendes gilt auch für den zweiten spitzen Winkel β:

$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{\frac{b}{a}} = \frac{\text{Gegenkathete von } \beta}{\text{Ankathete von } \beta}$ ($\beta \neq 90°$)