1 Hintergrundinformationen und Hinweise

1.1 Hintergrundinformationen

„Wie viele Menschen befinden sich in einem zehn Kilometer langen Stau auf der Autobahn?“ Aufgaben dieser Art haben auf den ersten Blick nur wenig mit Mathematik zu tun. Dennoch sind sie in den letzten Jahren in Deutschland immer bekannter geworden und haben unter dem Namen „Fermi-Aufgaben“ bereits Einzug in den Mathematikunterricht gehalten.

Aber was genau sind eigentlich Fermi-Aufgaben? Fermi-Aufgaben können als komplexe Schätzaufgaben oder mathematische Problemsituationen bezeichnet werden, für deren Bearbeitung eine Vernetzung von Basisfertigkeiten, Strategien und Alltagswissen nötig ist, ohne dass vorgefertigte Schemata angewendet werden können.[1] Sie sind benannt nach Enrico Fermi (1901 – 1954), einem bedeutenden Kernphysiker des 20ten Jahrhunderts, der sehr exakte Einschätzungen vornehmen und diese zudem folgerichtig mathematisch vernetzen konnte.

Fermi-Aufgaben leisten damit einen vielfältigen Beitrag zu einem aktuellen Mathematikunterricht, der sich an den geltenden Bildungsstandards orientiert und gleichzeitig Konsequenzen aus den Ergebnissen verschiedener internationaler Vergleichsstudien zieht, die einen vermehrten Einsatz von offenen und lebensrelevanten Aufgaben fordern.

Vor dem Hintergrund der aktuellen Bildungs-

Zu den allgemeinen Kompetenzen zählt hier etwa die Selbstständigkeit der Schüler[3], da Fermi-Aufgaben ganz unterschiedliche Annahmen, Lösungswege und Ergebnisse zulassen, die Schüler eigenständig und individuell entwickeln können.[4] Ebenso kann die Kommunikationsfähigkeit der Schüler weiter ausgebildet werden, da Fermi-Aufgaben in der Regel zu Diskussionen über die verschiedenen Annahmen und Ergebnisse führen.[5] Weitere konkrete Kompetenzen, die durch die Bearbeitung von Fermi-Aufgaben gefördert werden können, sind beispielsweise sinnvolles Schätzen, angemessenes Modellieren und Problemlösen sowie sorgfältiges Überschlagen. Ebenso wird ein Vergleichen und Überprüfen von Lösungswegen und Lösungen angeregt, da es immer verschiedene plausible Lösungen geben kann.[6]

Aus diesem Grund werden in diesem vorliegenden Band auch keine Musterlösungen für die gestellten Aufgaben angegeben. Für eine bessere Vorstellung gibt es jedoch im Anhang Beispielaufgaben mit Lösungen und Schätzwerte zur Orientierung, die helfen können, die Plausibilität der geschätzten und recherchierten Werte besser einschätzen zu können. Wie plausibel eine Lösung ist, hängt von der Genauigkeit der getroffenen Annahmen ab.

Beim Bearbeiten der Fermi-Aufgaben wird der siebenschrittige Modellbildungskreislauf[7] durch-

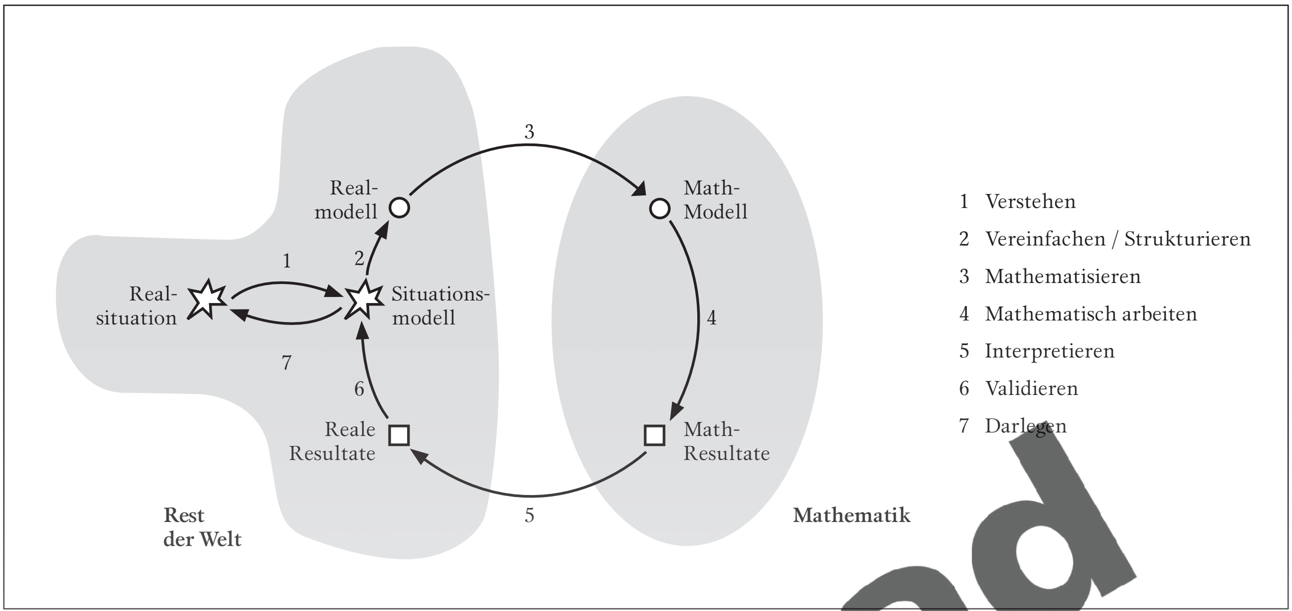


Abb. 1: *Prozessschema für Modellierungsaufgaben nach* Blum *(*Blum *(2006), S. 9)*

Schritt 1 betrifft das Konstruieren und Verstehen. Hier wird das Realmodell in ein Situationsmodell überführt, indem eine eigene mentale Vorstellung konstruiert wird, welche das Ziel, die Situation sowie die Fragestellung der Problemsituation berücksichtigt.[8] Insbesondere müssen die Schüler hier die relevanten Informationen der Aufgabe entnehmen.[9]

Anschließend wird das hergestellte Situationsmodell strukturiert und vereinfacht und damit in ein Realmodell umgewandelt (**Schritt 2**). Dies bedeutet, dass beispielsweise vereinfachende und idealisierende Annahmen über einzelne Aspekte der Aufgabenstellung getroffen werden müssen.[10]

In **Schritt 3** geht es darum, das Realmodell durch Mathematisieren in ein mathematisches Modell gesetzt, um schließlich ein mathematisches Resultat zu erhalten.[13]

In einem **5. Schritt** wird dieses mathematische Resultat interpretiert und als reales Resultat wieder in den „Rest der Welt" zurückgeführt.

Anschließend wird das reale Resultat bezüglich des Situationsmodells validiert, also gewertet (**Schritt 6**). Dies kann in der Regel dadurch geschehen, dass die Größenordnung des realen Resultates hinsichtlich seiner Plausibilität kontrolliert wird.[14] Wird an dieser Stelle festgestellt, dass diese Größenordnung nicht plausibel ist, müssen neue Annahmen über einzelne Aspekte der Aufgabenstellung getroffen werden. Anschließend müssen die restlichen Schritte des Modellbildungskreislaufes erneut durchlaufen werden.

Abgesehen von den bisher dargestellten Kompetenzen, die durch Fermi-Aufgaben gefördert werden können, eignen sich Fermi-Aufgaben auch gut, um eine Leistungsdifferenzierung zwischen einzelnen Schülern vorzunehmen. Aufgrund der Offenheit dieser Aufgaben findet eine natürliche Binnendifferenzierung statt, da die Schüler individuelle Herangehensweisen und Anspruchsniveaus wählen, die ihrem Leistungsstand entsprechen.[16] Durch die Arbeit mit Fermi-Aufgaben können somit gerade auch die Schüler gefördert werden, die ansonsten im Mathematikunterricht eher schwächere Leistungen erbringen. Sie erhalten die Möglichkeit, neue Seiten von sich zu zeigen, wenn sie beispielsweise kreative Ideen zur Lösung der Aufgabe mit einbringen.

16 Vgl. Büchter et al. (2010), S. 10

1.2 Hinweise für den Unterricht

Da eine Beschäftigung mit Fermi-Aufgaben nicht nur für Schüler, sondern ebenfalls für Lehrer eine anfängliche Hürde darstellen kann, möchte der vorliegende Band Möglichkeiten aufzeigen, diese Hürde zu überwinden und so einen Mathematikunterricht ermöglichen, der einen Beitrag zur Allgemeinbildung liefert und die Schüler somit auch auf die Zeit nach der Schule vorbereitet. Damit kann dieser Band als praktische Anregung verstanden werden, wie die Schüler der neunten und zehnten Jahrgangsstufe mit der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben vertraut gemacht werden können.

Dazu werden zu den einzelnen Themen der beiden Jahrgangsstufen verschiedene offene Aufgaben angeboten, die eine Staffelung von nur leicht geöffneten Aufgaben bis hin zu „echten" Fermi-Aufgaben darstellen. Somit wird einerseits eine Bearbeitung vielfältiger offener und lebensrelevanter Aufgaben ermöglicht und andererseits findet gleichzeitig eine langsame, aber sichere Heranführung an die Bearbeitung von Fermi-

Da Fermi-Aufgaben in der Regel verschiedene Fragen aufwerfen, führen sie oftmals zu Diskussionen zwischen den Schülern. Somit stellen Partner- oder Gruppenarbeiten geeignete Sozialformen dar, die es ermöglichen, diesem Diskussionsbedarf nachzukommen und die Schüler in gemeinsamer Interaktion einen Lösungsweg finden zu lassen. In der Regel können auf diese Weise gute Ergebnisse erzielt und viele Unsicherheiten geklärt werden. Außerdem kann diese Sozialform die Motivation der Schüler steigern.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der vielfältigen Variation von Sozialformen. Die Schüler bekommen zunächst die Gelegenheit, sich eigenständig mit einer Fermi-Aufgabe auseinanderzusetzen, um anschließend in Partner- oder Kleingruppenarbeit über ihre Annahmen und Überlegungen zu sprechen. Schließlich könnten innerhalb der Klassengemeinschaft verschiedene Lösungswege vorgestellt und miteinander verglichen sowie Unsicherheiten und Fragen geklärt den. Hier bieten sich beispielsweise Tafelbilder oder auch Plakate an. Im Anschluss an eine Lösungswegvorstellung ist es sinnvoll, Mitschüler Rückfragen stellen zu lassen und ihnen die Möglichkeit zu geben, eigene Ideen vorzustellen. Auf diese Weise können Diskussionen entstehen, die alle Schüler zum Weiterdenken anregen sowie zu einem tieferen Verständnis führen.

In welchem unterrichtlichen Rahmen Fermi-Aufgaben eingesetzt werden, entscheidet die Lehrkraft gemäß der Lerngruppe und der sonstigen Rahmenbedingungen.

Da es nur selten zeitlich möglich ist, zusammenhängende Unterrichtsstunden oder sogar eine ganze Unterrichtseinheit zum Thema Fermi-Aufgaben durchzuführen, bietet es sich an, Fermi-Aufgaben in den regulären Unterricht zu integrieren. So können etwa unter Berücksichtigung des aktuellen Unterrichtsthemas hin und wieder einzelne Aufgaben bewusst ausgewählt werden, um die Schüler mit der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben mehr und mehr vertraut zu machen.

Weiterhin können Fermi-Aufgaben aber auch zur Binnendifferenzierung eingesetzt werden, indem Schüler, die ihre regulären Aufgaben sehr schnell erledigt haben, durch ein Arbeitsblatt mit Fermi-Aufgaben gefordert werden können. Gleiches gilt für Vertretungsstunden: Auch hier können Fermi-Aufgaben eine gute Wahl darstellen, um einzelne Stunden sinnvoll zu gestalten und den Schülern anzubieten, neue Aufgaben und Sachverhalte zu entdecken.

1.3 Literaturangaben

Blum, Werner (2006): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: Andreas Büchter, Hans Humenberger, Stephan Hußmann u. Susanne Prediger (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis: Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 8-23.

Blum, Werner / Leiss, Dominik (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: Mathematik lehren. Heft 128, S. 18-21.

Büchter, Andreas / Leuders, Timo (2009): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern

Büchter, Andreas / Herget, Wilfried / Leuders, Timo / Müller, Jan Hendrik (2010): Die Fermi-Box. Lehrerkommentar. Stuttgart: Ernst Klett.

Greefrath, Gilbert (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Hinrichs, Gerd (2008): Modellierung im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum.

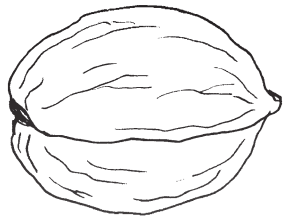
Kaufmann, Sabine (2006): Umgang mit unvollständigen Aufgaben. Fermi-Aufgaben in der Grundschule. In: Die Grundschulzeitschrift. 20. Jahrgang, Heft 191, S. 16-21.

Maass, Katja (2008): Mathematisches Model-

Aufgabe 1

Nussmischung

Chantal kauft eine Nussmischung aus Walnüssen und Haselnüssen. Die 200 g schwere Packung kostet 4,50 €. Chantal stellt fest, dass viel weniger Walnüsse enthalten sind als Haselnüsse.



a) Welche Mengen sind von beiden Nusssorten enthalten?
b) Wie teuer müsste die Mischung sein, wenn von beiden Nusssorten die gleiche Menge vorhanden wäre?

Tipp:
- Schätze und recherchiere, wie teuer 100 g Haselnüsse und 100 g Walnüsse sind!

Weiterführende Aufgabe:
- Wie teuer müsste die Mischung sein, wenn sie zu 80 % aus Walnüssen bestehen würde?

Aufgabe 2

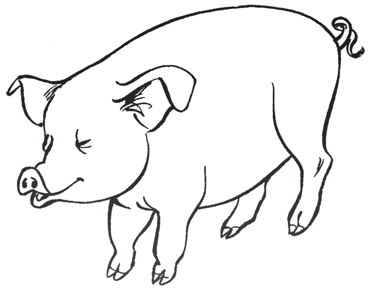
Oma und Enkelin

Frau Müller und ihre Enkelin sind zusammen 100 Jahre alt.

Aufgabe 3

Schweine und Hühner

Auf einem kleinen Bio-Bauernhof werden zwei verschiedene Tierarten gehalten. Es sind insgesamt 60 Tiere und mehr als 180 Beine.



Wie viele Tiere sind es von jeder Art?

Tipps:

- Gehe zunächst von einer beliebigen Anzahl der einen Art aus und überlege dann, wie viele Tiere der anderen Art es geben muss!
- Beachte die Mindestzahl von 180 Beinen!

Weiterführende Aufgabe:

- Angenommen, von beiden Tierarten wären es acht Tiere weniger. Wie viele Beine hätten nun alle Tiere in diesem Gehege zusammen?

Aufgabe 4

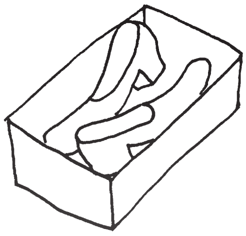
Hotel

Du machst Urlaub in einem großen deutschen Hotel.

Aufgabe 5

Schuhkarton

In einem Schuhkarton soll Büromaterial verstaut werden.



Wie viele Blöcke und Fineliner haben darin Platz?

Tipp:

- Schätze zuerst und recherchiere anschließend die Maße eines Schuhkartons!

Weiterführende Aufgabe:

- Wie viele Kerzen und Streichholzschachteln könnte man in einem Schuhkarton unterbringen?

Aufgabe 6

Busfahrt

Für einen Klassenausflug wurde ein Bus gemietet. Aufgrund einer Grippewelle fallen mehrere Schüler aus. Deshalb müssen die Kosten pro Schüler erhöht werden.

Aufgabe 7

Einkauf in der Bäckerei

Bruno wird von seiner Mutter zum Bäcker geschickt. Er soll dort für zehn Euro Brötchen und Croissants kaufen.

Wie viele Brötchen und Croissants bekommt er?

Tipps:

- Um zwei Variablen eindeutig zu bestimmen, benötigt man zwei Gleichungen!
- Schätze die jeweiligen Preise für ein Brötchen und ein Croissant!

Weiterführende Aufgabe:

- Bruno soll für fünf Euro genau zwei Croissants und für den Rest des Geldes Brötchen kaufen.
  Stelle die passende Gleichung auf und löse sie.

Aufgabe 8

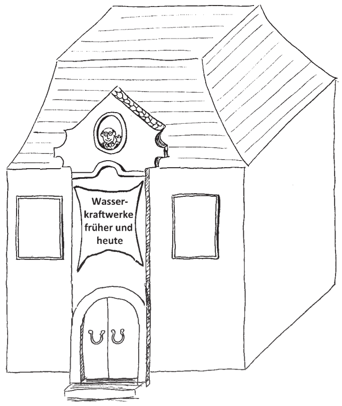
Geld abheben

Helga bereitet ein kreatives Geldgeschenk für eine Hochzeit vor und hebt dafür am Bankschalter genügend Geld von ihrem Konto ab. Sie bittet darum, nur 5- und 10-Euro-Scheine zu erhalten.

Aufgabe 9

Ausflug ins Museum

Familie Stark (2 Erwachsene, 3 Jugendliche) besucht im Urlaub ein Museum.



a) Wie hoch sind die Kosten für den Eintritt?
b) Wie viel zahlen sie für den gesamten Aufenthalt dort?

Tipps:

- Schätze die Eintrittspreise für Kinder und Erwachsene!
- Zusätzliche Kosten können z. B. durch Verpflegung oder Souvenirs entstehen!

Weiterführende Aufgabe:

- Wie hoch wären die Kosten, wenn die Familie zwei weitere Kinder hätte?

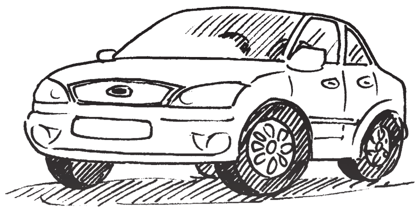
Aufgabe 10

Taxifahrt

Manchmal bestellt Jochen nach einer Party ein Taxi für den Heimweg. Letzte Woche war er auf der Party eines Vereinskameraden (Handball).

Aufgabe 11	Neues Auto

Gabi und Klaus legen sich ein neues Auto zu und schließen dafür gemeinsam eine Finanzierung ab.
Sie gehen beide arbeiten, verdienen aber unterschiedlich viel.



Wie lange zahlen sie für dieses Auto?

Tipps:
- Bei der Finanzierung eines Autos kann zu Beginn eine Einmalzahlung geleistet werden!
- Eine der beiden Gleichungen sollte den Gehaltsunterschied beschreiben; z. B. ist ein Gehalt doppelt so hoch oder um 500 € höher als das Gehalt des Partners!

Weiterführende Aufgabe:
- Wie lange zahlen sie für dieses Auto, wenn ein Verdienst wegbricht?

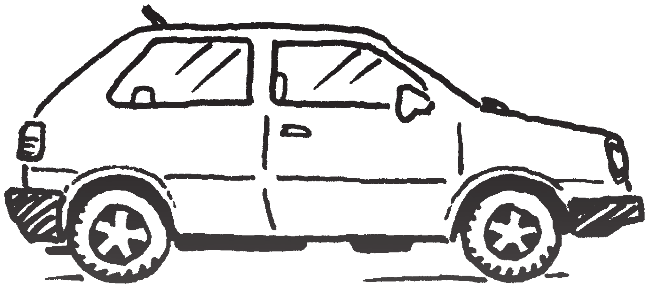
Aufgabe 12	Wasserverbrauch

Kai hat endlich eine günstige Studentenwohnung gefunden. Leider gibt es keinen eigenen Wasserzähler für diese kleine Einliegerwohnung. Die Vermieter geben an, mithilfe von Erfahrungswerten seinen Anteil ermitteln zu können.

Aufgabe 13

Anhalteweg

Anna ist mit ihrem Auto auf der Autobahn unterwegs.



Wie lang ist ihr Anhalteweg bei einer Bremsung?

Tipp:
- Anhalteweg = Reaktionsweg + Bremsweg

Weiterführende Aufgabe:
- Wie verändert sich der Anhalteweg unter Alkoholeinfluss oder schlechter Witterung, z. B. Nässe?

Aufgabe 14

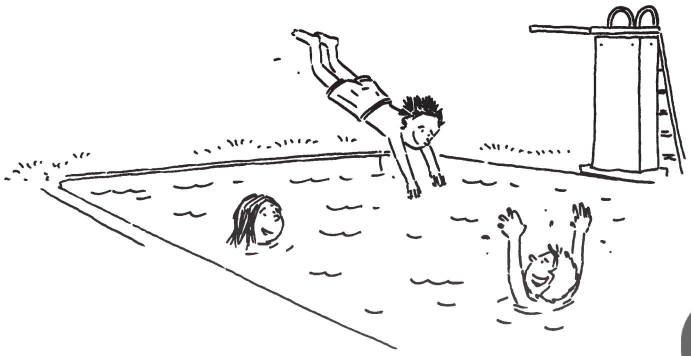
Parabeln im Alltag

Du machst einen Spaziergang durch deine Stadt.

Aufgabe 15

Kopfsprung

Timo macht im Schwimmbad einen Kopfsprung vom Dreimeterbrett. Dabei bewegt er sich ungefähr auf der Bahn einer Parabel.



Bestimme die Gleichung dieser Parabel.

Tipps:

- Erstelle eine Skizze und beschrifte sie mit sinnvollen Angaben!
- Verwende eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$!

Weiterführende Aufgabe:

- Welche Länge und Tiefe muss das Schwimmbecken mindestens haben?

Aufgabe 16

Basketball

Leon wirft einen Basketball senkrecht nach oben. Die Flugbahn des Basketballs entspricht einer Parabel.

Aufgabe 17

Feuerwerk

Der Jahreswechsel wird fast überall auf der Welt mit einem Feuerwerk gefeiert.

Bestimme, in welchem Radius die Reste auf dem Erdboden landen.

Tipps:

- Erstelle eine Skizze und beschrifte sie mit sinnvollen Angaben!
- Schätze, wie hoch Feuerwerksraketen fliegen und in welcher Höhe sie explodieren!
- Der Abschusspunkt ist zwar der Mittelpunkt für die Bestimmung des Radius, aber nicht der Scheitelpunkt des Feuerwerks!
- Verwende eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$!

Weiterführende Aufgabe:

- Welche Gesamtstrecke haben die Feuerwerkstteile in der Luft zurückgelegt, die als Reste auf dem Erdboden landen? Schätze mithilfe eines Koordinatensystems.

Aufgabe 18

Schuss des Torwarts

Der Torwart einer Fußballmannschaft schießt vom Strafraum aus in das gegenüberliegende Tor.

3. Hinweise zur Lösung von Fermi-Aufgaben

3.1 Beispielaufgaben mit Lösungen

Die Lösungswege von Fermi-Aufgaben können sehr individuell und vielfältig sein. Die Beispielaufgaben und ihre Lösungen dienen daher nur als Anhaltspunkt dafür, wie diese Aufgaben bearbeitet werden können.

Beispielaufgabe 1: Gymnastikbälle und Würfel

Grundaufgabe: Stell dir Folgendes vor: In einem Gymnastikball befindet sich ein Würfel. In diesem Würfel befindet sich ein weiterer Gymnastikball und in diesem Ball befindet sich dann noch ein weiterer Würfel. Dabei sind die einzelnen Körper immer so groß, dass sie genau in den nächstgrößeren Körper hineinpassen.
Wie groß ist die Oberfläche aller vier Körper zusammen?

Weiterführende Aufgabe: Wie groß ist das Volumen der beiden Würfel zusammen?

Beispiellösung für die Grundaufgabe:

Annahmen

- Balldurchmesser: 45 – 95 cm
- Die Körper berühren sich.

Mathematische Annahmen und Grundlagen

- Kugeloberfläche $O_K = 4\pi r^2 = \pi d^2$
- Balldurchmesser = Raumdiagonale des eingeschlossenen Würfels
- Kantenlänge $a = d : \sqrt{3}$
- Würfeloberfläche $O_W = 6a^2$ (a = Kantenlänge)
- enthaltene Körper (geordnet): Kugel 1 > Würfel 1 > Kugel 2 > Würfel 2

Zwischenergebnisse

- Kugel 1: $d_1 = 45 – 90$ cm → $O_{K1} = 6\,361{,}7 – 25\,446{,}9$ cm²
- Würfel 1: $d_1 = 45 – 90$ cm; $a_1 = 26{,}0 – 52{,}0$ cm → $O_{W1} = 4\,056 – 16\,224$ cm²
- Kugel 2: $d_2 = a_1 = 26{,}0 – 52{,}0$ cm → $O_{K2} = 2\,123{,}7 – 8\,494{,}9$ cm²
- Würfel 2: $d_2 = 26{,}0 – 52{,}0$ cm; $a_2 = 15{,}0 – 30{,}0$ cm → $O_{W2} = 1\,350 – 5\,400$ cm²

Beispiellösung für die weiterführende Aufgabe:

Annahmen
- Balldurchmesser: 45 – 95 cm
- Die Körper berühren sich.

Mathematische Annahmen und Grundlagen
- Balldurchmesser = Raumdiagonale des eingeschlossenen Würfels
- Würfelvolumen $V = a^3$ (a = Kantenlänge)

Zwischenergebnisse
- Würfel 1: a_1 = 26,0 – 52,0 cm → V_{W1} = 17 576 – 140 608 cm³
- Würfel 2: a_2 = 15,0 – 30,0 cm → V_{W2} = 3 375 – 27 000 cm³

Mögliche Ergebnisse
- Ergebnis mit minimalen Annahmen: $V_{W1} + V_{W2}$ = 20 951 cm³
- Ergebnis mit maximalen Annahmen: $V_{W1} + V_{W2}$ = 167 608 cm³

Beispielaufgabe 2: Kino und Katze

Grundaufgabe: Katzen sind beliebte Haustiere.
Wie viele Kinobesucher besitzen eine Katze als Haustier?

Weiterführende Aufgabe: Wie viele Zoobesucher besitzen Fische als Haustiere?

Beispiellösung für die Grundaufgabe:

Recherche / Annahmen
- Größe eines Kinosaals: 45 – 265 Sitzplätze
- Anzahl der Kinosäle: 1 – 8
- Besucherquote: ca. 75 % (Durchschnitt)
- Katze als Haustier: 10 – 25 % aller Haushalte

Mathematischer Ansatz
- Anzahl der Kinobesucher pro Abend: $\text{Saal}_{\text{Anzahl}} \cdot \text{Platz}_{\text{Anzahl}} \cdot \text{Besucherquote}$
- Anzahl der Katzenbesitzer: $\text{Kinobesucher}_{\text{Anzahl}} \cdot \text{Katzenbesitzer}_{\text{Anteil}}$

Zwischenergebnis
- Anzahl der Kinobesucher pro Abend: 34 – 1590

Beispiellösung für die weiterführende Aufgabe:

Annahmen

- Besucheranzahlen eines Zoos: 180 000 – 1 870 000 pro Tag
- Fische als Haustier: 3 – 15 % aller Haushalte

Mathematischer Ansatz

- Anzahl der Fischbesitzer: $\text{Zoobesucher}_{\text{Anzahl}} \cdot \text{Fischbesitzer}_{\text{Anteil}}$

Mögliche Ergebnisse

- Ergebnis mit minimalen Annahmen: 5 400 Fischhalter
- Ergebnis mit maximalen Annahmen: 280 500 Fischhalter

3.2 Schätzwerte zur Orientierung

Alle Aufgaben in diesem Heft lassen sich grundsätzlich durch das Nutzen geschätzter und recherchierter Werte lösen. Die Recherche möglicher Schätzwerte ist Teil der Fermi-Aufgaben bzw. kann deren Bearbeitung erleichtern. Die hier aufgeführten Werte dienen der Orientierung, damit die Schüler die Genauigkeit ihrer Schätzwerte besser einordnen können, sowohl am Anfang, als auch am Ende der Bearbeitung.

2 Gleichungen

Aufgabe 1)	Haselnusskerne: 1,20 – 2,70 € pro 100 g; Walnusskerne: 1,30 – 3,50 € pro 100 g
Aufgabe 4)	Zimmeranzahl der großen deutschen Hotels: 500 – 1 125
Aufgabe 5)	Volumen Schuhkarton: 3 000 – 7 500 cm^3; Volumen Block: 100 – 900 cm^3; Volumen Fineliner: 10 – 11 cm^3
Aufgabe 7)	Brötchen: 0,40 – 0,60 €; Croissant: 0,95 – 1,50 €
Aufgabe 9)	Eintritt Jugendliche: 1,50 – 8,00 €; Eintritt Erwachsene: 2,50 – 15,00 €
Aufgabe 10)	Grundgebühr 2 – 5 €; Preis pro Kilometer: 1,50 – 2,50 €
Aufgabe 11)	Preise für Neuwagen (normaler Pkw): 10 000 – 40 000 €