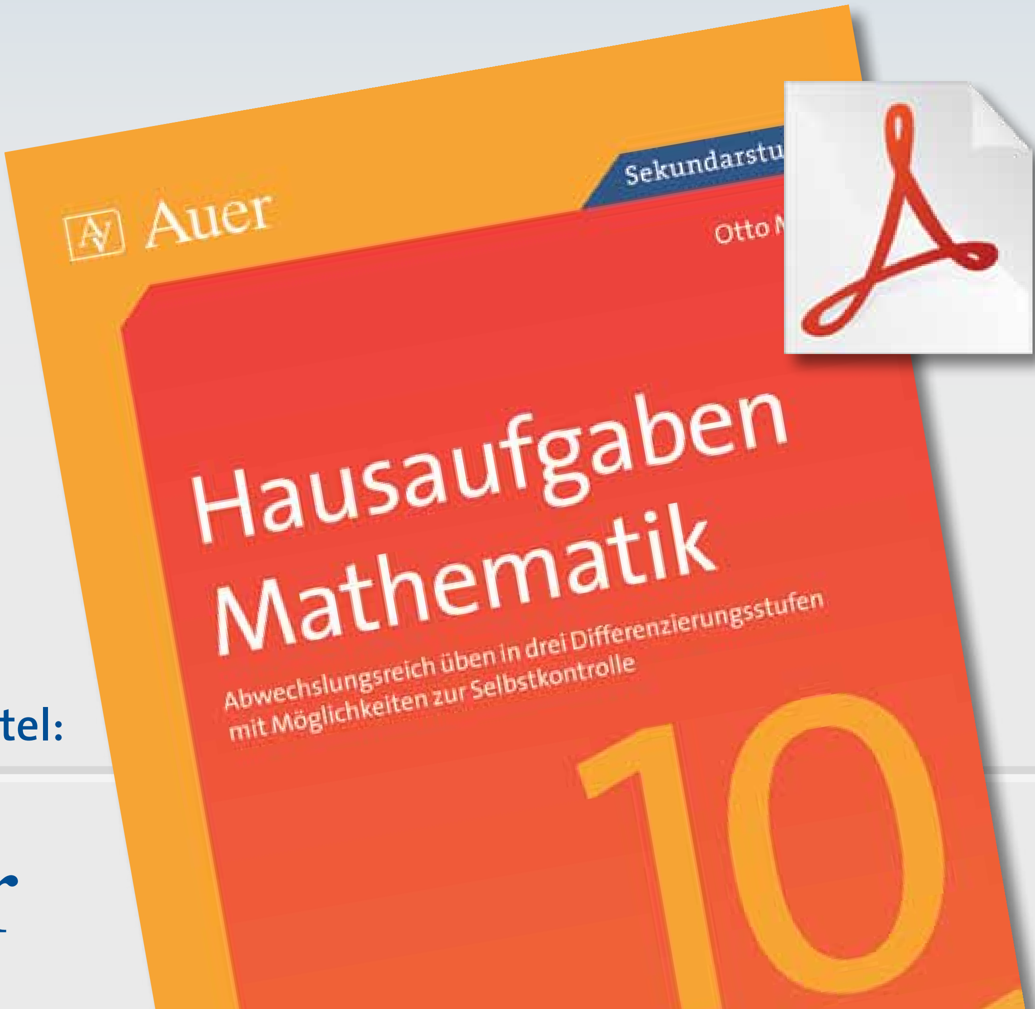
Download

Otto Mayr

Hausaufgaben: Potenzen und Wurzeln

Üben in drei Differenzierungsstufen

Downloadauszug
aus dem Originaltitel:



Auer

Hausaufgaben: Potenzen und Wurzeln

Üben in drei Differenzierungsstufen

★ **1. Schreibe als Dezimalzahl.**

a) $2{,}3 \cdot 10^{-4}$ b) $6{,}12 \cdot 10^{6}$ c) $4{,}09 \cdot 10^{3}$ d) $8{,}24 \cdot 10^{-5}$

e) $0{,}7 \cdot 10^{8}$ f) $0{,}45 \cdot 10^{7}$ g) $3{,}18 \cdot 10^{9}$ h) $5{,}7 \cdot 10^{-10}$

★ **2. Notiere als Zehnerpotenz in der Standardschreibweise.**

a) 12 500 b) 130 000 000 c) 6 080 000 d) 9 300 000 000

e) 0,0081 f) 0,000003 g) 0,0000408 h) 0,00705

★★ **3. Ordne richtig zu.**

A) 4,5 Millionen	1) $4{,}5 \cdot 10^{9}$	D) 3,2 Milliardstel	1) $3{,}2 \cdot 10^{-9}$
B) 4,5 Milliarden	2) $4{,}5 \cdot 10^{15}$	E) 3,2 Billionstel	2) $3{,}2 \cdot 10^{-6}$
C) 4,5 Billiarden	3) $4{,}5 \cdot 10^{6}$	F) 3,2 Millionstel	3) $3{,}2 \cdot 10^{-12}$

★★ **4. Das Licht legt in einer Sekunde 300 000 km zurück.**

Wie lange braucht das Licht von der Erde bis zu dem Fixstern, der unserem Planetensystem am nächsten liegt, dem Alpha Centauri, wenn dieser $4{,}068 \cdot 10^{13}$ km von der Erde entfernt ist? Runde das Ergebnis auf eine Dezimalstelle.

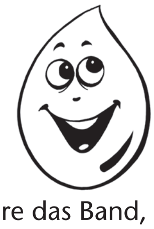
Berechne zunächst, welche Entfernung das Licht in einem Jahr zurücklegt.

★★ **5. Die Erde hat ein Gewicht von ca. $5{,}98 \cdot 10^{21}$ Tonnen, die Sonne ein Gewicht von $1{,}99 \cdot 10^{27}$ Tonnen.**

Wie viel Mal schwerer ist die Sonne im Vergleich zur Erde?
Runde auf volle Tausender.

★★ **6. Ein Gold-Atom wiegt $3{,}29 \cdot 10^{-22}$ g und hat einen Radius von $1{,}442 \cdot 10^{-12}$ m.**

a) Wie viele Atome befinden sich in einem Ring mit einem Gewicht von 18 g?
b) Wie viele Goldatome passen aneinandergereiht auf eine Länge von 2 m?
Runde bei der Standardschreibeweise jeweils auf eine Dezimalstelle.



★★★ **7. In 1 mm³ Blut befinden sich ca. 6 250 weiße Blutkörperchen (= Mittelwert).**

Ein Erwachsener besitzt ca. 6 Liter Blut.
a) Wie viele weiße Blutkörperchen besitzt er ungefähr?
b) Ein Blutkörperchen hat einen Durchmesser von $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. Wie viele Meter lang wäre das Band, wenn man alle weißen Blutkörperchen eines Menschen aneinanderlegen würde?
c) In einem cm³ Blut befinden sich ca. $5 \cdot 10^{9}$ rote Blutkörperchen. Wie viel Mal mehr rote als weiße Blutkörperchen befinden sich im Blut eines Menschen?

Verwende die gleiche Maßeinheit.

→ *Lösungen zu 4 – 7*

800 4,3 $3{,}75 \cdot 10^{10}$ $6{,}9 \cdot 10^{11}$ 333 000 $5{,}5 \cdot 10^{22}$ 281 250

★ **1. Multipliziere aus und fasse so weit wie möglich zusammen.**

a) $4(a^2 + b^2) - 2a^2 + 5b^2$ b) $(x^5 - y^6)8 - 3(x^5 - y^6)$

c) $4p^2 + 3(t^2 - p^2) + 7(p^2 - t^2)$ d) $(c^4 - d^7)12a^2 - (4a^2 - 5a^2)3c^4 + 10a^2d^7$

★ **2. Rechne aus.**

a) $(25 - 22)^2 + 4^3 - 3 \cdot 5 + 27$ b) $(28 - 23)^3 - (7 - 4)^4$

c) $3^6 - (6^5 - 6^4)2^3$ d) $(8 + 2)^3 - 7^0(11 - 5)^3$

★ **3. Notiere als Bruch.**

a) 5^{-3} b) 3^{-2} c) 10^{-3} d) 3^{-4}

e) 9^{-1} f) 100^{-2} g) 2^{-4} h) 4^{-4}

★★★ **4. Schreibe als Potenz mit positiver Hochzahl.**

a) $0{,}25^{-3}$ b) $0{,}125^{-5}$ c) $0{,}001^{-2}$ d) $0{,}00032^{-2}$

e) $0{,}008^{-3}$ f) $0{,}03125^{-4}$ g) $0{,}015625^{-2}$ h) $0{,}0625^{-3}$

★★ **5. Notiere als Potenz mit negativem Exponenten. Gib alle Möglichkeiten an.**

a) $\frac{1}{125}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{6561}$

e) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{16807}$ g) $\frac{1}{512}$ h) $\frac{1}{625}$

★ **6. Berechne.**

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt[3]{1331}$ c) $\sqrt{1{,}69}$ d) $\sqrt[4]{410{,}0625}$

e) $\sqrt[3]{8}$ f) $\sqrt[7]{128}$ g) $\sqrt[5]{243}$ h) $\sqrt[4]{39{,}0625}$

★ **7. Berechne.**

a) $625^{\frac{1}{4}}$ b) $0{,}729^{\frac{1}{3}}$ c) $2401^{\frac{1}{4}}$ d) $100000^{\frac{1}{5}}$

e) $1^{\frac{1}{7}}$ f) $4{,}096^{\frac{1}{3}}$ g) $65536^{\frac{1}{8}}$ h) $0{,}0049^{\frac{1}{2}}$

★★ **8. Bestimme den Wert der Wurzel. Runde auf eine Dezimalstelle.**

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[4]{150}$ c) $\sqrt[7]{1400}$ d) $\sqrt[3]{140{,}608}$

e) $\sqrt[6]{60}$ f) $\sqrt[10]{8500}$ g) $\sqrt[8]{4800}$ h) $\sqrt[9]{18000}$

Potenzgesetze

★ 1. Multipliziere die Potenzen mit gleicher Basis.

a) $4^3 \cdot 4^5$ b) $3^8 \cdot 3^{-6}$ c) $a^3 \cdot a^{-7}$ d) $x^{-2} \cdot x^{-3}$

★ 2. Dividiere die Potenzen mit gleicher Basis.

a) $7^6 : 7^2$ b) $4^7 : 4^{-3}$ c) $r^3 : r^{-2}$ d) $b^{-3} : b^{-5}$

★ 3. Multipliziere die Potenzen mit gleichem Exponenten.

a) $6^4 \cdot 1{,}5^4$ b) $2{,}5^{-3} \cdot 4^{-3}$ c) $a^5 \cdot b^5$ d) $x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$

★ 4. Dividiere die Potenzen mit gleichem Exponenten.

a) $60^5 : 5^5$ b) $18^3 : 9^3$ c) $z^{-4} : a^{-4}$ d) $x^7 : 3^7$

★ 5. Potenziere die Potenzen.

a) $(4^3)^2$ b) $(a^4)^{-4}$ c) $\left(7^{-\frac{1}{2}}\right)^4$ d) $(x^{-3})^{-2}$

★★ 6. Beachte alle Rechengesetze.

a) $24a^5 : 8b^5$ b) $\left(x^3 \cdot y^5\right)^2$ c) $b^{-3} \cdot b^4$ d) $(4^2 + a^{-9})\,(4^{-2} + b^{-9})$

★★ 7. Ergänze die fehlenden Exponenten.

a) $(4^2)^3 = 4^?$ b) $(2^?)^{-4} = 2^8$ c) $(7^3)^? = 1$ d) $(a^x)^? = a^{xy}$

★★ 8. Fasse soweit wie möglich zusammen.

a) $\dfrac{28x^4 \cdot 2{,}25y^7 \cdot 4{,}8z^{-3}}{1{,}5y^{-3} \cdot 1{,}6z^4 \cdot 7x^3}$ b) $\dfrac{0{,}729a^4 \cdot 1{,}44b \cdot 0{,}8c^3}{3{,}2c^5 \cdot 0{,}9a^4 \cdot 1{,}2b^{-2}}$

★★★ 9. Löse die folgenden Aufgaben.

a) $a^m \cdot b^n \cdot a \cdot b^{3n}$ b) $a^0 \cdot a^x \cdot a^y$

c) $x^{n+2} \cdot x^n \cdot x^{n-2} \cdot x$ d) $(-a)^7 \cdot (ab^3)^{-4}$

e) $5^{\frac{2}{3}}$ f) $5^{-\frac{2}{3}}$

g) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$ h) $x^{\frac{1}{a}} : y^{\frac{1}{a}}$

i) $\left(\sqrt[x]{b}\right)^n$ j) $\sqrt{a}^b \cdot \sqrt{a}^b$

k) $(x^{-3}a)^{-\frac{5}{3}}$ l) $5^{-2} + 0{,}96$

1. Bestimme den Exponenten.

a) $3^x = 81$ b) $5^x = 625$ c) $10^x = 100\,000$ d) $2^x = \frac{1}{16}$
e) $5^x = \frac{1}{125}$ f) $7^x = \frac{1}{343}$ g) $10^x = 0{,}0001$ h) $5^x = 0{,}04$

2. Berechne.

a) $\log_4 1\,024$ b) $\log_8 32\,768$ c) $\log_3 \frac{1}{27}$ d) $\log_7 49$
e) $\log_6 6$ f) $\log_2 \frac{1}{64}$ g) $\log_3 243$ h) $\log_{10} 1\,000\,000$

3. Cobalt-60 hat eine Halbwertszeit von 5 Jahren.

Wie viele Jahre dauert es, bis von ursprünglich 150 g dieses radioaktiven Stoffes nur noch 10 g vorhanden sind?

4. Recherchiere im Internet, ergänze den folgenden Lückentext und berechne.

Plutonium ist ein chemisches Element mit dem Elementsymbol ____________ (1). Plutonium ist ein _______________ (2) und radioaktives Schwermetall.
Benannt ist es nach dem Stern ________________ (3). Es gehört zu den __________________ (4) in der Natur vorkommenden Elementen. Plutonium wird aber nur in kleinsten Spuren in sehr alten Gesteinen gefunden. Die Menge, die in Kernkraftwerken erzeugt wird, ist sehr viel ______________ (5).
Als eines der wenigen spaltbaren Elemente spielt Plutonium eine wichtige Rolle für den Betrieb von _______________________ (6) und den Bau von _____________________ (7). Plutonium war das Spaltmaterial der _____________________ (8), die am 9. August 1945 auf Nagasaki abgeworfen wurde.
Die Halbwertszeit von Plutonium-239 beträgt __________________ (9) Jahre.

Wie viele Jahre vergehen, bis von ursprünglich 120 g Plutonium-239 nur noch 5 g vorhanden sind? Runde den Logarithmus auf vier Stellen nach Komma, die gesuchte Zeitangabe auf eine Stelle nach dem Komma.

Wachstumsprozesse

★ **1. Eine Stadt hat 68 000 Einwohner.**

In den nächsten 5 Jahren soll die Zahl der Einwohner jährlich um 2,8 % steigen.
Wie viele Einwohner hat die Stadt voraussichtlich in 5 Jahren?

★ **2. Frau Mühlenbeck legt bei ihrer Bank einen Betrag von 20 000 € zu einem Zinssatz von 2,5 % an.**

Auf welchen Betrag ist ihr angelegtes Geld nach Ablauf der vereinbarten Laufzeit von 4 Jahren mit Zins und Zinseszinsen angewachsen?

★ **3. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 3,5 %?**

Das Ergebnis ist eine runde Zehnerzahl.

★★ **4. Eine Stadt hat 91 802 Einwohner.**

In den letzten 4 Jahren stieg die Einwohnerzahl jährlich um 3,5 %. In den nächsten 10 Jahren wird sie voraussichtlich jährlich um 0,5 % weniger steigen.

a) Wie viele Einwohner hat die Stadt voraussichtlich in 10 Jahren?
b) Wie viele Einwohner hatte die Stadt vor 4 Jahren?
c) Wie hoch ist das durchschnittliche Wachstum der Bevölkerung im gesamten erfassten Zeitraum?
d) Begründe, warum dein Ergebnis der Aufgabe 4c) richtig sein kann.

★★ **5. Die Betreiber einer Skiliftanlage konnten ihren Umsatz innerhalb der letzten 3 Jahre bei einer durchschnittlichen Steigerung von 4,5 % auf 1 511 928 € steigern.**

a) Wie hoch war der Umsatz vor 3 Jahren?
b) Wie hoch war der Umsatz vor 8 Jahren, wenn die Steigerung in den ersten 5 Jahren 2 % pro Jahr betrug?
c) Um wie viel Prozent ist der Umsatz gegenüber dem ersten Jahr angewachsen?

★★ **6. Der Umsatz eines Autozulieferers stieg seit Firmengründung bei einer Wachstumsrate von durchschnittlich 8,5 % von 150 000 € auf 244 720 € pro Quartal.**

a) Welchen Umsatz erzielt der Autozulieferer heute jährlich?
b) Vor wie vielen Jahren wurde die Firma gegründet?

★★★ **7. Eine Firma möchte ihre Produktionszahlen bei einer Steigerung von jährlich 26 % vervierfachen.**

Nach wie vielen Jahren wird dies möglich sein?

Aufgabe 6 und 7 ergeben gleich viele Jahre.

★★★ **8. Ergänze anhand der Rechnung den Text der Aufgabenstellung.**

$n = \log 7{,}69 : \log 1{,}12$ $\quad n \approx 18$ Jahre

Ein Gemälde mit einem Wert von 20 000 € erzielte eine Wertsteigerung von jährlich _____ %. Wie lange hatte es der Sammler in seinem Besitz, wenn er das Gemälde zu einem Preis von _______________ € verkaufte?

➔ ***Lösungen zu 1, 2, 4 und 5***

123 374 | 3,1 | 26 | 1 324 897 | 78 068 | 1 200 000 | 80 000 | 22 076,26

★ **1. Eine Stadt hat 56 000 Einwohner.**

In den nächsten 3 Jahren wird die Zahl der Einwohner jährlich um ca. 2,5 % sinken.
Wie viele Einwohner hat die Stadt voraussichtlich in drei Jahren?

★★ **2. Einen Kaufkraftzuwachs bei angelegtem Kapital kann man nur dann erzielen, wenn die Zinsen höher sind als die Inflationsrate.**

Welcher Verlust ergibt sich für einen Anleger im Laufe von 5 Jahren, wenn er für seine Spareinlage (50 000 €) Zinsen in Höhe von 1,2 % erhält, die Inflationsrate aber bei 1,7 % liegt?

★★ **3. Der Umsatz einer Firma nahm in den letzten 4 Jahren jeweils um 5,8 % ab.**

Ursprünglich betrug er 450 000 €.
a) Wie hoch ist der aktuelle Umsatz?
b) Wie hoch ist der Umsatz in 3 Jahren, wenn die Abnahme um 2,8 %-Punkte zurückgeht?
c) Wie hoch ist der Umsatzrückgang verglichen mit dem anfangs erzielten Umsatz in Prozent?

★★ **4. Eine Autofirma vergleicht ihre Absatzzahlen.**

Leider wurden in den 3 letzten Jahren jeweils 6 % weniger Autos verkauft als im jeweiligen Vorjahr.
a) Wie hoch waren die Verkaufszahlen ursprünglich, wenn momentan 1 038 230 Autos pro Jahr das Werk verlassen?
b) Wie viele Autos werden in 5 Jahren verkauft, wenn der Absatzrückgang sich jährlich um die Hälfte verringert?
c) Wie groß ist der Umsatzrückgang durchschnittlich bezogen auf die gesamten Jahre?

★★ **5. Cäsium-137 hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren.**

a) Wie viel mg Cäsium-137 sind von ursprünglich 140 mg nach 75 Jahren noch vorhanden?
b) In einer Messung wurden 14,14 mg Cäsium-137 nachgewiesen. Wie viel war es vor 15 Jahren?
c) Berechnen Sie den jährlichen Abbau von Cäsium-137 in Prozent.

★★★ **6. Polonium-218 hat eine Halbwertszeit von 3 Minuten.**

a) Wie viel Milligramm sind von 60 mg nach einer halben Stunde noch vorhanden? Runde auf zwei Dezimalstellen.
b) Gib das Ergebnis in Potenzschreibweise an.
c) Wie viel Prozent der ursprünglichen Menge sind dies?
d) Wie viele Promille der ursprünglichen Menge sind dies?
e) Berechne den Abbau von Polonium-218 pro Minute in Prozent.
f) Berechne das Ergebnis von a) ohne die Funktionstasten des Taschenrechners.

→ *Lösungen*

1 250 000 | 2 | 0,06
891 563
28 | 21
323 394 | 0,977 | 354 337
4,8 | 24,75
20 | 1 238 | 51 904
$5,86 \cdot 10^{-2}$ | 0,0977

Zehnerpotenzen

1. a) 0,00023 b) 6 120 000 c) 4 090 d) 0,0000824
e) 70 000 000 f) 4 500 000 g) 3 180 000 000 h) 0,00000000057

2. a) $1{,}25 \cdot 10^4$ b) $1{,}3 \cdot 10^8$ c) $6{,}08 \cdot 10^6$ d) $9{,}3 \cdot 10^9$
e) $8{,}1 \cdot 10^{-3}$ f) $3 \cdot 10^{-6}$ g) $4{,}08 \cdot 10^{-5}$ h) $7{,}05 \cdot 10^{-3}$

3. A3, B1, C2, D1, E3, F2

4. Licht in einem Jahr: $300\,000\text{ km/s} \cdot 60\text{ s} \cdot 60\text{ min} \cdot 24\text{ h} \cdot 365\text{ d} = \underline{9{,}4608 \cdot 10^{12}\text{ km}}$
$\frac{4{,}068 \cdot 10^{13}\text{ km}}{9{,}4608 \cdot 10^{12}\text{ km/J}} \approx \underline{4{,}3\text{ Jahre}}$
Das Licht von der Erde bis zum Alpha Centauri braucht ca. 4,3 Jahre.

5. $1{,}99 \cdot 10^{27} : 5{,}98 \cdot 10^{21} \approx \underline{333\,000}$
Die Sonne ist 333 000 Mal schwerer als die Erde.

6. a) $18\text{ g} : 3{,}29 \cdot 10^{-22}\text{ g} \approx \underline{5{,}5 \cdot 10^{22}}$
Es sind $5{,}5 \cdot 10^{22}$ Atome in einem Ring von 18 g.

b) $2\text{ m} : (2 \cdot 1{,}442 \cdot 10^{-12}\text{ m}) = 2\text{ m} : 2{,}884 \cdot 10^{-12}\text{ m} \approx \underline{6{,}9 \cdot 10^{11}}$
$6{,}9 \cdot 10^{11}$ Atome ergeben aneinandergereiht 2 m.

7. a) $6\,250 \cdot 1000 \cdot 1\,000 \cdot 6 = \underline{3{,}75 \cdot 10^{10}}$
Ein Erwachsener besitzt durchschnittlich $3{,}75 \cdot 10^{10}$ weiße Blutkörperchen.

b) $3{,}75 \cdot 10^{10} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-6}\text{ m} = \underline{281\,250\text{ m}}$
Alle weißen Blutkörperchen eines Menschen würden aneinandergelegt ein Band von 281 250 m ergeben.

c) $5 \cdot 10^6 : 6\,250 = \underline{800}$
Ein Mensch hat 800 Mal mehr rote als weiße Blutkörperchen.

Mit Potenzen rechnen

1. a) $4(a^2 + b^2) - 2a^2 + 5b^2 = 4a^2 + 4b^2 - 2a^2 + 5b^2 = \underline{2a^2 + 9b^2}$
b) $(x^5 - y^6)8 - 3(x^5 - y^6) = 8x^5 - 8y^6 - 3x^5 + 3y^6 = \underline{5x^5 - 5y^6}$
c) $4p^2 + 3(t^2 - p^2) + 7(p^2 - t^2) = 4p^2 + 3t^2 - 3p^2 + 7p^2 - 7t^2 = \underline{8p^2 - 4t^2}$
d) $(c^4 - d^7)12a^2 - (4a^2 - 5a^2)3c^4 + 10a^2d^7$
$= 12a^2c^4 - 12a^2d^7 - 12a^2c^4 - 15a^2c^4 + 10a^2d^7 = \underline{-2a^2d^7 - 15a^2c^4}$

2. a) $(25 - 22)^2 + 4^3 - 3 \cdot 5 + 27 = 3^2 + 64 - 15 + 27 = 9 + 64 - 15 + 27 = \underline{85}$
b) $(28 - 23)^3 - (7 - 4)^4 = 125 - 81 = \underline{44}$
c) $3^6 - (6^5 - 6^4)2^3 = 729 - 6 \cdot 8 = 729 - 48 = \underline{681}$
d) $(8 + 2)^3 - 7^0(11 - 5)^3 = 10^3 - 1 \cdot 6^3 = 1\,000 - 216 = \underline{784}$

3. a) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \underline{\frac{1}{125}}$ b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \underline{\frac{1}{9}}$ c) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \underline{\frac{1}{1\,000}}$
d) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \underline{\frac{1}{81}}$ e) $9^{-1} = \underline{\frac{1}{9}}$ f) $100^{-2} = \frac{1}{100^2} = \underline{\frac{1}{10\,000}}$
g) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \underline{\frac{1}{16}}$ h) $4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \underline{\frac{1}{256}}$

4. a) $0{,}25^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = \underline{64}$
b) $0{,}125^{-5} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-5} = 8^5 = \underline{32\,768}$
c) $0{,}001^{-2} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-2} = 1\,000^2 = \underline{1\,000\,000}$
d) $0{,}00032^{-2} = \left(\frac{32}{100\,000}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3\,125}\right)^{-2} = 3\,125^2 = \underline{9\,765\,625}$
e) $0{,}008^{-3} = \left(\frac{8}{1\,000}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{125}\right)^{-3} = 125^3 = \underline{1\,953\,125}$
f) $0{,}03125^{-4} = \left(\frac{3\,125}{100\,000}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{32}\right)^{-4} = 32^4 = \underline{1\,048\,576}$
g) $0{,}015625^{-2} = \left(\frac{15\,625}{1\,000\,000}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{64}\right)^{-2} = 64^2 = \underline{4\,096}$
h) $0{,}0625^{-3} = \left(\frac{625}{10\,000}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-3} = 16^3 = \underline{4\,096}$

5. a) $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \underline{5^{-3}}$ b) $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \underline{4^{-2}\text{ oder }2^{-4}}$
c) $\frac{1}{216} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \underline{6^{-3}}$ d) $\frac{1}{6\,561} = \left(\frac{1}{9}\right)^4 = \underline{9^{-4}\text{ oder }3^{-8}}$
e) $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \underline{3^{-4}\text{ oder }9^{-2}}$ f) $\frac{1}{16\,807} = \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \underline{7^{-5}}$
g) $\frac{1}{512} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \underline{8^{-3}\text{ oder }2^{-9}}$ h) $\frac{1}{625} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 = \underline{25^{-2}\text{ oder }5^{-4}}$

6. a) $\sqrt{81} = \underline{9}$ b) $\sqrt[3]{1331} = \underline{11}$ c) $\sqrt{1{,}69} = \underline{1{,}3}$
d) $\sqrt[4]{410{,}0625} = \underline{4{,}5}$ e) $\sqrt[3]{8} = \underline{2}$ f) $\sqrt[7]{128} = \underline{2}$
g) $\sqrt[5]{243} = \underline{3}$ h) $\sqrt[4]{39{,}0625} = \underline{2{,}5}$

7. a) $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = \underline{5}$ b) $0{,}729^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0{,}729} = \underline{0{,}9}$
c) $2\,401^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2\,401} = \underline{7}$ d) $100\,000^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{100\,000} = \underline{10}$
e) $1^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{1} = \underline{1}$ f) $4{,}096^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4{,}096} = \underline{1{,}6}$
g) $65\,536^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{65\,536} = \underline{4}$ h) $0{,}0049^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}0049} = \underline{0{,}07}$

8. a) 2 b) ≈ 3,5 c) ≈ 2,8 d) 5,2
e) ≈ 2 f) ≈ 2,5 g) ≈ 2,9 h) ≈ 3

Potenzgesetze

1. a) 4^8 b) 3^2 c) a^{-4} d) x^{-5}

2. a) 7^4 b) 4^{10} c) r d) b^2

3. a) 9^4 b) 10^{-3} c) $(ab)^5$ d) $(xy)^{\frac{1}{2}}$

4. a) 12^5 b) 2^3 c) $\left(\frac{z}{a}\right)^{-4}$ d) $\left(\frac{x}{3}\right)^7$

5. a) 4^6 b) a^{-16} c) 7^{-2} d) x^6

6. a) $3\left(\frac{a}{b}\right)^5$ b) x^6y^{10} c) b d) $4^{-4} + 4^2b^{-9} + 4^{-2}a^{-9} + (ab)^{-9}$

7. a) 6 b) -2 c) 0 d) y

8. a) $18xy^{10}z^{-7}$ b) $0{,}243b^3c^{-2}$

9. a) $a^{m+1}b^{4n}$ b) a^{x+y} c) x^{3n+1} d) $a^{-3}b^{-12}$
e) $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ f) $\sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$ g) $x^{\frac{3}{4}}$ h) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a}}$
i) $b^{\frac{n}{x}}$ j) a^b k) $x^5a^{-\frac{5}{3}}$ l) $\frac{1}{5^2} + 0{,}96 = 0{,}04 + 0{,}96 = 1$

Logarithmen berechnen

1. a) 4 b) 4 c) 5 d) –4
e) –3 f) –3 g) –4 h) –2

2. a) 5 b) 5 c) –3 d) 2
e) 1 f) –6 g) 5 h) 6

3.
$$N_t = N_0 \cdot 0{,}5^t$$
$$5 = 150 \cdot 0{,}5^t \quad |:150$$
$$0{,}0667 = 0{,}5^t$$
$$\rightarrow \quad t = \frac{\log 0{,}0667}{\log 0{,}5}$$
$$t \approx 3{,}9 \quad \rightarrow \quad 5 \cdot 3{,}9 = 19{,}5$$

Es dauert ca. 19,5 Jahre, bis von ursprünglich 150 g Cobalt-60 noch 10 g vorhanden sind.

4. (1) Pu (2) giftiges (3) „Pluto“
(4) schwersten (5) größer (6) Kernkraftwerken
(7) Kernwaffen (8) Atombombe (9) 24110

$$N_t = N_0 \cdot 0{,}5^t$$
$$5 = 120 \cdot 0{,}5^t \quad |:120$$
$$0{,}0417 = 0{,}5^t$$
$$\rightarrow \quad t = \frac{\log 0{,}0417}{\log 0{,}5}$$
$$t \approx 4{,}6 \quad \rightarrow \quad 24110 \cdot 4{,}6 = 110906$$

Es dauert noch ca. 110906 Jahre, bis von 120 g Plutonium-239 noch 5 g vorhanden sind.

Wachstumsprozesse

1. 68 000 Ew. $\cdot 1{,}028^5 \approx$ <u>78 068 Ew.</u>
Die Stadt hat in 5 Jahren voraussichtlich 78 068 Einwohner.

2. 20 000 € $\cdot 1{,}025^4 \approx$ <u>22 076,26 €</u>
Ihr Geld ist auf 22 076,26 € angewachsen.

3. $2 = 1 \cdot 1{,}035^n$
$2 = 1{,}035^n$
$\rightarrow$ log 2 : log 1,035
$n \approx 20{,}45$
<u>$n \approx 20$</u>
Das Kapital verdoppelt sich bei einem Zinssatz von 3,5 % in 20 Jahren.

4. a) 91 802 Ew. $\cdot 1{,}03^{10} \approx$ <u>123 374 Ew.</u>
Die Stadt hat in 10 Jahren voraussichtlich 123 374 Einwohner.

b) $91\,802 = n \cdot 1{,}035^4 \quad | : 1{,}035^4$
<u>$80\,000 \approx n$</u>
Vor 4 Jahren hatte die Stadt ca. 80 000 Einwohner.

c) $123\,374 = 80\,000 \cdot a^{14} \quad | : 80\,000$
$1{,}5422 \approx a^{14} \quad | \sqrt[14]{}$
$1{,}031 \approx a \quad \rightarrow$ <u>3,1 %</u>
Das durchschnittliche Wachstum ist 3,1 %.

d) Das Ergebnis muss laut der Aufgabenstellung zwischen 3,0 % und 3,5 % liegen.

5. a) $1\,511\,928 = n \cdot 1{,}045^3 \quad | : 1{,}045^3$
<u>$1\,324\,897 \approx n$</u>
Der Umsatz vor 3 Jahren betrug 1 324 897 €.

b) $1\,324\,897 = n \cdot 1{,}02^5 \quad | : 1{,}02^5$
<u>$1\,200\,000 \approx n$</u>
Der Umsatz vor 8 Jahren betrug 1 200 000 €.

c) 1 200 000 = 100 %
12 000 = 1 %
1 511 928 ≈ <u>126 %</u> $\rightarrow$ <u>Wachstum von 26 %</u>
Der Umsatz ist gegenüber dem ersten Jahr um 26 % angestiegen.

6. a) 244 720 € · 4 = <u>978 880 €</u>
Der Autozulieferer erzielt einen jährlichen Umsatz von 978 880 €.

b) $978\,880 = 600\,000 \cdot 1{,}085^x \quad | : 600\,000$
$1{,}63 = 1{,}085^x$
$\rightarrow x = \log 1{,}63 : \log 1{,}085 \quad \rightarrow$ <u>$x \approx 6$ Jahre</u>
Die Firma wurde vor 6 Jahren gegründet.

7. $\log 1{,}26 \cdot n = \log 4 \rightarrow n = \log 4 : \log 1{,}26 \rightarrow$ <u>$n \approx 6$ Jahre</u>
Nach 6 Jahren ist eine Steigerung von 26 % möglich.

8. 12 %, 153 800 €
Ursprünglicher Ansatz: $153\,800 = 20\,000 \cdot 1{,}12^n \quad | : 20\,000$
$7{,}69 = 1{,}12^n$
$\rightarrow \log 7{,}69 : \log 1{,}12$

Abnahmeprozesse

1. $y = n \cdot a^x$
$y = 56\,000$ Ew. $\cdot 0{,}975^3$
<u>$y \approx 51\,904$ Ew.</u>
Die Stadt hat in 3 Jahren voraussichtlich 51 904 Einwohner.

2. $y = 50\,000$ € $\cdot 0{,}995^5$
$y \approx 48\,762$ € $\rightarrow$ 50 000 € – 48 762 € = <u>1 238 €</u>
Es ergibt sich ein Kaufkraftverlust von 1 238 €.

3. a) $y = 450\,000$ € $\cdot 0{,}942^4$
<u>$y \approx 354\,337$ €</u>
Der aktuelle Umsatz beträgt 354 337 €.

b) $y = 354\,337$ € $\cdot 0{,}97^3$
<u>$y \approx 323\,394$ €</u>
Der Umsatz in 3 Jahren wäre 323 394 €.

c) 450 000 € = 100 %
4 500 € = 1 %
323 394 € ≈ 72 %
$\rightarrow$ Umsatzrückgang ca. <u>28 %</u>
Der Umsatzrückgang beträgt ca. 28 %.

4. a) $y = 1\,038\,230 : 0{,}94^3$
<u>$y = 1\,250\,000$</u>
Ursprünglich wurden 1 250 000 Autos jährlich verkauft.

b) $y = 1\,038\,230 \cdot 0{,}97^5$
<u>$y = 891\,563$</u>
In 5 Jahren sind 891 563 Autos jährlich verkauft worden.

c) $y = n \cdot a^x$
$891\,563 = 1\,250\,000 \cdot a^7 \quad | : 1\,250\,000$
$0{,}7133 \approx a^7 \quad | \sqrt[7]{}$
$0{,}952 \approx a \quad \rightarrow$ <u>$p \approx 4{,}8$ %</u>
Der Umsatzrückgang beträgt 4,8 %.

5. a) $y = 140 \text{ mg} \cdot 0{,}5^{2,5}$
<u>$y = 24{,}75$ mg</u>
Nach 75 Jahren sind noch 24,75 mg Cäsium-137 vorhanden.

b) $14{,}14 \text{ mg} = n \cdot 0{,}5^{0,5} \quad | : 0{,}5^{0,5}$
<u>$20 \text{ mg} \approx n$</u>
Vor 15 Jahren waren es ca. 20 mg Cäsium-137.

c) $\sqrt[30]{0{,}5} \approx 0{,}98 \rightarrow$ <u>2 % jährliche Abnahme</u>
Der jährliche Abbau von Cäsium-137 beträgt 2%.

6. a) $y = 60 \text{ mg} \cdot 0{,}5^{10}$
$y \approx 0{,}0586 \approx$ <u>0,06 mg</u>
Nach einer halben Stunde sind noch 0,06 mg Polonium-218 vorhanden.

b) <u>$5{,}86 \cdot 10^{-2}$ mg</u>

c) 60 mg = 100 %
0,6 mg = 1 %
0,0586 mg ≈ <u>0,0977 %</u>
Das sind ca. 0,1 % der ursprünglichen Menge.

d) 0,0977 % ≈ <u>0,977 ‰</u>
Das sind 0,977 ‰ der ursprünglichen Menge.

e) $\sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79 \rightarrow$ <u>21 %</u>
Polonium-218 baut sich um 21 % in der Minute ab.

f) 60 mg · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 · 0,5 ≈ <u>0,0586 mg</u>