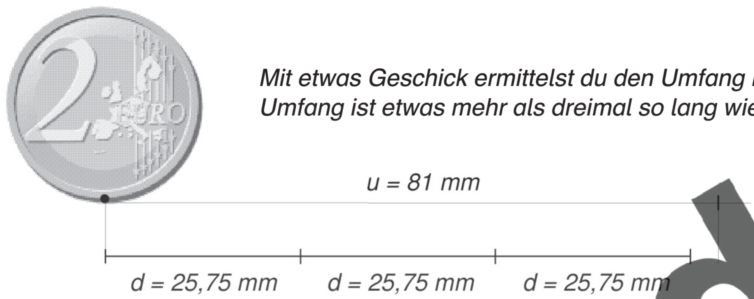
Umfang Kreis

Um den Umfang von kreisförmigen Gegenständen wie Teller, Dosen, Flaschen oder Münzen zu ermitteln, kann man experimentell vorgehen. Markiere den Rand eines 2-€-Stückes mit einem Punkt und rolle die Münze einmal auf einem Blatt Papier ab.

HINWEIS

Der Durchmesser dieser Münzen ist genormt: 25,75 mm.



Mit etwas Geschick ermittelst du den Umfang mit 81 mm, d.h. der Umfang ist etwas mehr als dreimal so lang wie der Durchmesser.

Etwas einfacher lässt sich z.B. der Umfang einer Tesafilm-, Krepp- und Paketbandrolle ermitteln. Markiere dazu den Anfang des Tesafilms auf der nächsten Filmschicht und stelle den Durchmesser fest. Ziehe nun den Tesafilm bis zu der Markierung ab und klebe ihn auf. Miss die Länge des Streifens und du erhältst den Umfang. Auch hier wirst du feststellen, dass der Umfang der Rolle etwas mehr als das Dreifache des Durchmessers beträgt.

MERKE

Dividiert man den Umfang eines Kreises durch seinen Duchmesser, so erhält man einen konstanten Zahlenwert, der etwas über dem Dreifachen des Durchmessers liegt:

$\frac{u}{d} \approx 3$ $\quad$ $u \approx 3 \cdot d$

Jahrhundertelang haben sich Mathematiker bemüht, diese konstante Zahl „in den Griff zu bekommen“. Vergebens. Diese Zahl ist nicht periodisch, unendlich lang und transzendent. Schnelle Supercomputer haben sie auf mehr als 6 Milliarden Stellen berechnet. Diese merkwürdige Zahl wird π (griechischer Buchstabe, sprich „Pi“) genannt. Hier die ersten 10 Nachkommastellen: 3,1415926535.

Der Umfang eines Kreises mit dem Radius r bzw. dem Durchmesser d berechnet sich mit

$\mathbf{u = d} \cdot \pi$ bzw. $\mathbf{u = 2 \cdot r} \cdot \pi$;

dabei ist $\pi \approx 3,14$

Umfang Kreis

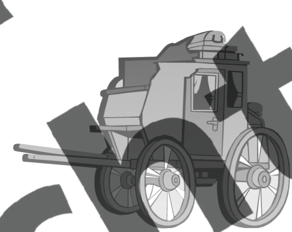
AUFGABE 1 Wenn Inder im 5. Jahrhundert den Umfang eines Kreises berechnen wollten, so multiplizierten sie den Durchmesser mit $[\frac{7}{4}]^2$. Berechne den Umfang eines Kreises (d = 32 mm) mit dem indischen Wert, mit $\pi = 3{,}14$ und mit dem Taschenrechner.

AUFGABE 2 Ptolemäus, ein berühmter Astronom, Geograf und Mathematiker, der um 140 nach Christus lebte, rechnete mit $\pi = 3\,\frac{17}{120}$. Um wie viel unterscheidet sich sein Wert von 3,14?

AUFGABE 3 Berechne den Umfang der Kreise.
a) r = 4 cm b) d = 21 km c) d = 122 mm d) r = 17 dm

AUFGABE 4 Berechne den Radius der Kreise.
a) u = 7 cm b) u = 2 km c) u = 31,4 mm d) u = 85 km

AUFGABE 5 Schmied Iron Mike muss die Räder der Postkutsche mit neuen Eisenreifen versehen. Wie viele Meter Bandeisen braucht er, wenn die Vorderräder einen Radius von 45 cm haben und die Hinterräder einen Durchmesser von 1,60 m?



AUFGABE 6 Die Länge des Äquators beträgt ca. 40 000 km. Berechne den Radius der Erde.

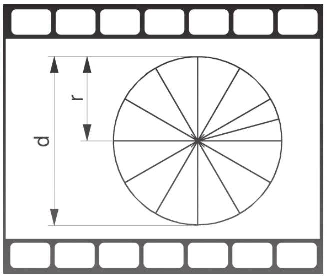
AUFGABE 7 Der Mond hat einen Radius von ungefähr 1 750 km. Wie lang ist sein „Äquator"?

AUFGABE 8 Wie verändert sich der Umfang eines Kreises, wenn man seinen Radius
a) verdoppelt?
b) vervierfacht?
Rechne mit einem Radius von 5 cm.

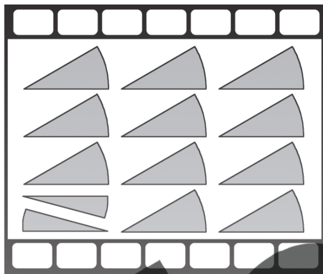
AUFGABE 9 Wie oft drehen sich die Räder (d = 42 cm) eines Motorrades

Wenn man weiß, dass sich der Umfang eines Kreises mit u = 2 · r · π berechnet, dann lässt sich auch schnell eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts herleiten.

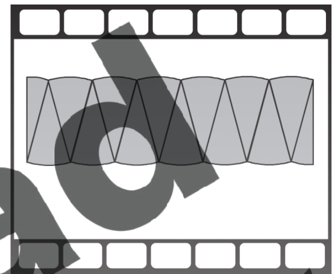
Teile den Kreis in zwölf gleich große Stücke. Eines der Stücke teilst du in zwei gleiche Teile.



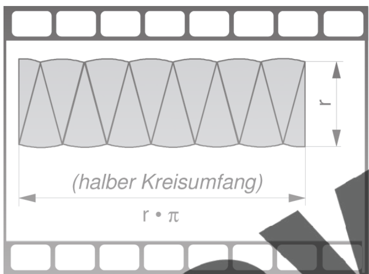
Schneide die dreizehn Teile aus.



Setze die Teile zu einer Fläche zusammen, die einem Rechteck ähnlich sieht.



Teilt man den Kreis nicht in zwölf, sondern in 24 oder 48 Teile, dann ist die rechteckige Form deutlicher zu erkennen.



Der Flächeninhalt dieses Rechtecks ist gleich dem Produkt aus der Länge r · π und der Breite r des Rechtecks.

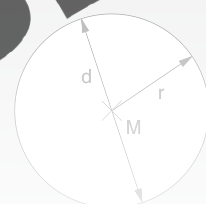
$A = r \cdot \pi \cdot r$
$A = r^2 \cdot \pi$

MERKE

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r bzw. dem Durchmesser d berechnet sich mit

$A = r^2 \cdot \pi$ bzw. $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$;

dabei ist $\pi \approx 3{,}14$.



BEISPIEL 1 Berechne den Flächeninhalt der Kreise.

a) r = 9 cm $A = r^2 \cdot \pi$ b) d = 12 dm $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Flächeninhalt Kreis

AUFGABE 1

Berechne den Flächeninhalt der Kreise.

a) $r = 7$ cm b) $d = 21$ mm c) $d = 12$ km d) $r = 2$ dm

AUFGABE 2

Berechne den Radius der Kreise.

a) $A = 200{,}96\ \text{cm}^2$ b) $A = 12{,}56\ \text{km}^2$ c) $A = 379{,}94\ \text{mm}^2$ d) $A = 63{,}585\ \text{m}^2$

AUFGABE 3

Wenn der chinesische Ingenieur Tsu Ch'ung-Chih (430–501) den Flächeninhalt eines Kreises berechnete, dann benutzte er $\pi = \frac{355}{113}$. Um wie viel m^2 unterscheidet sich sein Ergebnis bei einem Kreis mit einem Radius von 45 m von dem Ergebnis mit $\pi = 3{,}14$?
Ein anderer Chinese, Wang Fang, benutzte $\pi = \frac{142}{45}$. Führe dieselbe Rechnung durch.

AUFGABE 4

Berechne den Umfang der Kreise.

a) $A = 18\ \text{cm}^2$ b) $A = 6{,}6\ \text{km}^2$ c) $A = 0{,}94\ \text{m}^2$ d) $A = 4{,}98\ \text{km}^2$

AUFGABE 5

Berechne den Flächeninhalt der Kreise.

a) $u = 17$ cm b) $u = 1{,}6$ km c) $u = 344$ m d) $u = 4{,}98$ dm

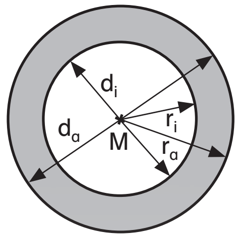
AUFGABE 6

Berechne den Flächeninhalt.

AUFGABE 7

Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Kreises, wenn man seinen Radius
a) verdoppelt?
b) verdreifacht?
Rechne als Beispiel mit einem Radius von 5 cm.

Bei einigen Aufgaben zum Flächeninhalt des Kreises hast du bereits Teile eines Kreises berechnet (Viertelkreis, Halbkreis). Es gibt weitere Kreisteile, die man ebenfalls berechnen kann. Eine Fläche, die von zwei Kreisen begrenzt wird, die den gleichen Mittelpunkt haben (also konzentrisch sind), wird als **Kreisring** bezeichnet.



Der Flächeninhalt des Kreisrings ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt der beiden Kreise.

BEISPIEL 1 Berechne den Flächeninhalt des Kreisringes.

$r_a = 8{,}5$ cm, $r_i = 3{,}5$ cm

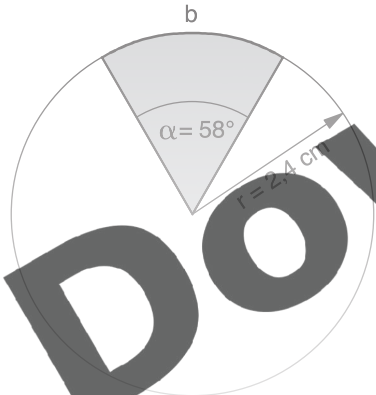
$A_{Kreisring} = r_a^2 \cdot \pi - r_i^2 \cdot \pi$ oder $A_{Kreisring} = \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)$

$A_{Kreisring} \approx 3{,}14 \cdot [(8{,}5\text{ cm})^2 - (3{,}5\text{ cm})^2]$

$A_{Kreisring} \approx 188{,}4\text{ cm}^2$

Schneidet man aus einem Kreis ein „Tortenstück" heraus, dann nennt man diese Fläche **Kreisausschnitt**. Die Größe dieser Fläche hängt natürlich vom Winkel α ab.

BEISPIEL 2 Berechne den Flächeninhalt und die Bogenlänge b des Kreisausschnitts.



Du berechnest zunächst den Flächeninhalt des gesamten Kreises: $A = r^2 \cdot \pi$

Dann berechnest du den Flächeninhalt für einen Winkel α von 1°. $A = \frac{r^2 \cdot \pi}{360°}$

Anschließend berechnest du den Flächeninhalt für einen beliebigen Winkel α. $A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$

$A \approx \frac{(2{,}4\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 58°}{360°}$ $A \approx 2{,}91\text{ cm}^2$

Für die Berechnung der Bogenlänge b gehst du ähnlich vor: $b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$

$b \approx \frac{2 \cdot 2{,}4\text{ cm} \cdot 3{,}14 \cdot 58°}{360°}$

$b \approx 2{,}43$ cm

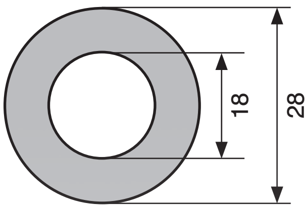
Schneidet man von einem Kreisausschnitt das untere Dreieck ab, dann entsteht eine Fläche, die man als **Kreisabschnitt** bezeichnet.

Den Umfang des Kreisabschnitts berechnest du mit

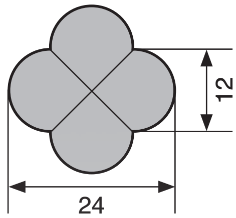
Flächeninhalt Kreisteile

AUFGABE 1 Berechne den Flächeninhalt der markierten Flächen (Maße in mm).

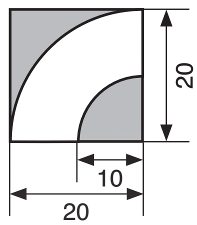
a)



b)



c)

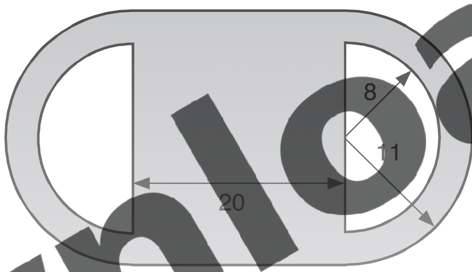


AUFGABE 2 Berechne den Flächeninhalt der Kreisringe mit den Radien r_i und r_a.

a) $r_i = 7$ cm, $r_a = 12$ cm

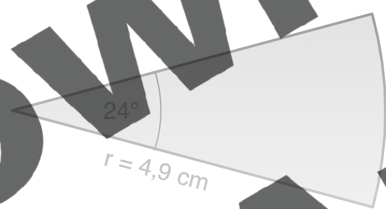
b) $r_i = 1{,}20$ m, $r_a = 1{,}58$ m

AUFGABE 3 Berechne den Flächeninhalt der markierten Fläche (Angaben in mm).

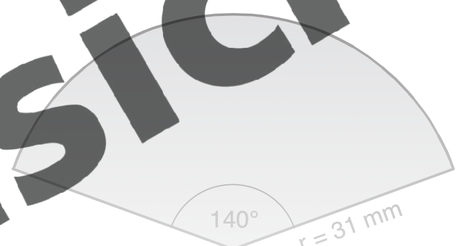


AUFGABE 4 Berechne die Bogenlänge und den Flächeninhalt der Kreisausschnitte.

a)



b)



AUFGABE 5 Berechne den Flächeninhalt und die Bogenlänge der Kreisausschnitte.

a) $r = 12$ cm, $\alpha = 70°$

b) $r = 0{,}6$ m, $\alpha = 190°$

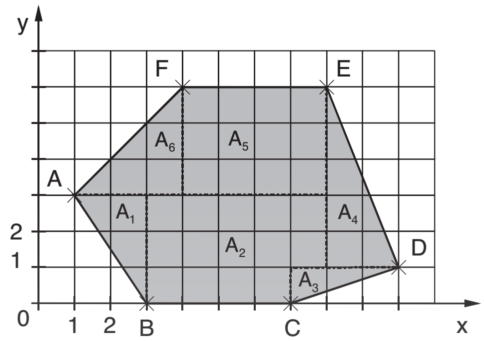
AUFGABE 6 Berechne die fehlenden Größen der Kreisausschnitte.

a) $b = 10{,}05$ cm, $\alpha = 72°$, r, A

b) $r = 48$ cm, $b = 25{,}12$ cm, α, A

AUFGABE 8

$A_1 = 300\ m^2$
$A_2 = 1\,400\ m^2$
$A_3 = 150\ m^2$
$A_4 = 500\ m^2$
$A_5 = 1\,200\ m^2$
$A_6 = 450\ m^2$
$A\ = 4\,000\ m^2$



AUFGABE 9 $u = 240\ m$ $A = 2\,325\ m^2$

AUFGABE 10 Der Bauplatz ist $381{,}7\ m^2$ groß und kostet 108 784,50 €.

Lösungen zu Seite 39

AUFGABE 1

$u_1 \approx 32\ mm \cdot [\frac{7}{4}]^2$ | $u_2 \approx 32\ mm \cdot 3{,}14$ | $u_3 \approx 32\ mm \cdot 3{,}141592653$
$u_1 \approx 98\ mm$ | $u_2 \approx 100{,}48\ mm$ | $u_3 \approx 100{,}5309649\ mm$

AUFGABE 2 $3\,\frac{17}{120} = 3{,}141\overline{6}$ Die Differenz zu 3,14 beträgt $0{,}001\overline{6}$.

AUFGABE 3 a) $u \approx 25{,}12\ cm$ b) $u \approx 65{,}94\ km$ c) $u \approx 383{,}08\ mm$ d) $u \approx 106{,}76\ dm$

AUFGABE 4 a) $r \approx 1{,}115\ cm$ b) $r \approx 318{,}47\ m$ c) $r \approx 5\ mm$ d) $r \approx 13{,}535\ km$

AUFGABE 5 Der Schmied braucht ungefähr 15,7 m Bandeisen.

AUFGABE 6 Der Radius der Erde beträgt ungefähr 6 369,427 km.

AUFGABE 7 Der „Äquator“ des Mondes beträgt ungefähr 10 990 km.

AUFGABE 8 Bei einem Radius von 5 cm beträgt der Umfang ungefähr 31,4 cm.
a) Der Umfang verdoppelt sich ($u \approx 62{,}8\ cm$).
b) Der Umfang vervierfacht sich ($u \approx 125{,}6\ cm$).

AUFGABE 9 Der Umfang des Rades beträgt ungefähr 131,88 cm.
$80\,\frac{km}{h} = 80\,000\,\frac{m}{h} = 1333{,}\overline{3}\,\frac{m}{min} = 22{,}\overline{2}\,\frac{m}{s} = 2\,222{,}\overline{2}\,\frac{cm}{s}$

AUFGABE 5 a) $A \approx 23\ cm^2$ b) $A \approx 0{,}204\ km^2$ c) $A \approx 9\,421{,}7\ m^2$ d) $A \approx 1{,}97\ dm^2$

AUFGABE 6 a) $A \approx 769{,}66\ m^2$ b) $A \approx 606{,}75\ m^2$ c) $A \approx 578{,}25\ m^2$

AUFGABE 7
$A_1 \approx 78{,}5\ cm^2$
$A_2 \approx 314\ cm^2$ Der Flächeninhalt vervierfacht sich.
$A_3 \approx 706{,}5\ cm^2$ Der Flächeninhalt verneunfacht sich.

AUFGABE 8 $A \approx 78{,}5\ km^2$ $A \approx 785\,000\ a$

AUFGABE 9 $A_{Quadrat} = 400\ cm^2$ $r_{Kreis} \approx 12{,}7\ cm$ $A_{Kreis} \approx 509{,}6\ cm^2$

AUFGABE 10 Der Stahldraht muss eine Fläche von $50\ mm^2$ aufweisen. Der Radius beträgt ≈ 4 mm.

AUFGABE 11 $A \approx 13\,266{,}5\ km^2$, das sind 1 326 650 ha.

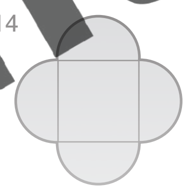
AUFGABE 12 Das Beet hat eine ungefähre Fläche von $28{,}26\ m^2$, das sind $282\,600\ cm^2$, auf die 1 884 Tulpen passen ($282\,600\ cm^2 : 150\ cm^2$).

Lösungen zu Seite 43

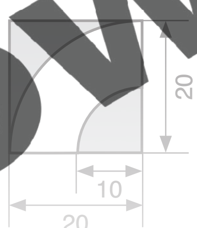
AUFGABE 1

a) $A \approx [(14\ mm)^2 - (9\ mm)^2] \cdot 3{,}14$
$A \approx 361{,}1\ mm^2$

b) $A \approx (12\ mm)^2 + 2 \cdot (6\ mm)^2 \cdot 3{,}14$
$A \approx 370{,}08\ mm^2$



c)



$$A \approx \frac{(20\ mm)^2 - (20\ mm)^2 \cdot 3{,}14}{4} + \frac{(10\ mm)^2 \cdot 3{,}14}{4}$$
$A \approx 164{,}5\ mm^2$

AUFGABE 2

a) $A \approx [(12\ cm)^2 - (7\ cm)^2] \cdot 3{,}14$
$A \approx 298{,}3\ cm^2$

b) $A \approx [(1{,}58\ m)^2 - (1{,}20\ m)^2] \cdot 3{,}14$
$A \approx 3{,}317096\ m^2$

AUFGABE 3

$A \approx 20\ mm \cdot 22\ mm + [(11\ mm)^2 - (8\ mm)^2] \cdot 3{,}14$
$A \approx 618{,}98\ mm^2$